

1 曲线 $y = (1-x)^3$ 的凹区间为 _____

解: $y' = -3(1-x)^2$, $y'' = 6(1-x)$ 令 $y'' = 0 \Rightarrow x = 1$

当 $x < 1$ 时, $y'' > 0$, 即 $(-\infty, 1)$ 为凹区间

当 $x > 1$ 时, $y'' < 0$, 即 $(1, +\infty)$ 为 $y = (1-x)^3$ 的凸区间

2 函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的凸区间为 _____

解: $y' = -\frac{1}{(x+1)^2}$ $y'' = \frac{2}{(x+1)^3}$ $x = -1$ 为函数的间断点

$x < -1$ 时, $y'' < 0$, 即区间 $(-\infty, -1)$ 为凸区间

$x > -1$ 时, $y'' > 0$, 即区间 $(-1, +\infty)$ 为凹区间

3 曲线 $y = (x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为 _____

解: $y' = 2(x-1)(x-3)^2 + (x-1)^2 \cdot 2(x-3) = 2(x-1)(x-3) \cdot 2(x-2)$

$y'' = 4(x-2)(x-3) + 4(x-1)(x-2) + 4(x-1)(x-3)$

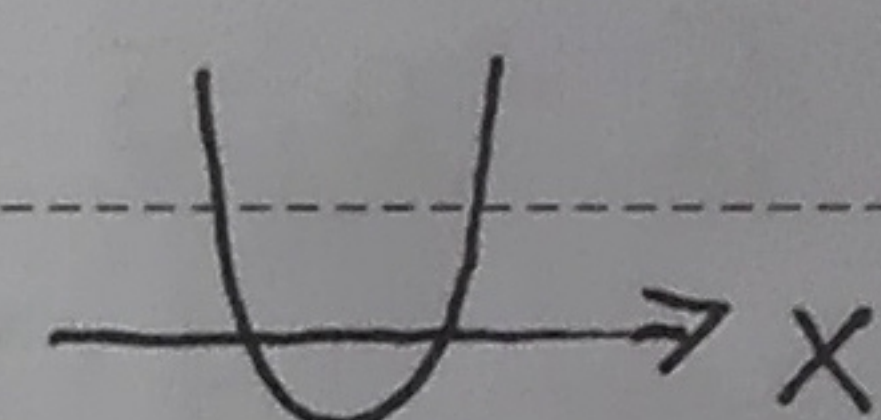
$= 4(3x^2 - 12x + 11)$

函数 $f(x) = 3x^2 - 12x + 11$ 为一开口向上的抛物线, 方程

$3x^2 - 12x + 11 = 0$ 由 $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 11 > 0$ 知有两个不同的实根,

在两根点左右两侧 $f(x) = 3x^2 - 12x + 11$ 改变符号, 于是

拐点个数为 2.



4 曲线 $y = xe^{-x}$ 的拐点为 _____

解: $y' = e^{-x} + x(-1)e^{-x} = (1-x)e^{-x}$ $y'' = -e^{-x} + e^{-x}(x-1) = (x-2)e^{-x}$

令 $y'' = 0 \Rightarrow x = 2$, 且 $x < 2$ 时, $y'' < 0$; 当 $x > 2$ 时, $y'' > 0$

于是, $(2, y(2)) = (2, 2e^{-2})$ 为拐点.

题号

44号

二 1

判断曲线 $y = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 3$ 的凹凸性.

解: $y' = 4x^3 - 6x^2 - 24x$

$$y'' = 12x^2 - 12x - 24 = 12(x+1)(x-2)$$

令 $y'' = 0 \Rightarrow x = -1$ 或 $x = 2$

在 $(-\infty, -1)$ 上, $y'' > 0$, 是凹弧

在 $(-1, 2)$ 上, $y'' < 0$, 是凸弧

在 $(2, +\infty)$ 上, $y'' > 0$, 曲线 y 是凹的.

2 求曲线 $y = \sqrt[3]{x-1}$ 的拐点

解: $y' = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}$ $y'' = -\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}}$ 令 $y'' = 0$ 无解. 但

$x=1$ 为 y 的不可导点. $x < 1$ 时 $y'' > 0$; $x > 1$ 时 $y'' < 0$

于是 $(1, 0)$ 是 $y = \sqrt[3]{x-1}$ 的拐点.

P77

3 求函数 $y = \frac{1}{4} - x^2 - \ln \sqrt{x}$ 的凹凸区间与该曲线的拐点.

解: $y' = -2x - \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -2x - \frac{1}{2x}$ $y'' = -2 + \frac{1}{2x^2}$

令 $y'' = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ 或 $x = -\frac{1}{2}$ (舍去)

当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $y'' > 0$; 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $y'' < 0$, 于是

在 $(0, \frac{1}{2})$ 上, 曲线是凹的, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上, 曲线是凸的.

$(\frac{1}{2}, y(\frac{1}{2})) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \ln 2)$ 为拐点.

二 4 已知 $(2, 4)$ 是曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 的拐点, 且对应的函数在点 $x = 3$ 处取得极值, 求 a, b, c

解: 由题意知

$$\begin{cases} y''(2) = 0 \\ y(2) = 4 \\ y'(3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 + 2a = 0 \\ 8 + 4a + 2b + c = 4 \\ 27 + 6a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 9 \\ c = 2 \end{cases}$$

三 证明题 当 $x > y > 0$ 时, 证明 $\ln \sqrt{xy} < \ln \frac{x+y}{2}$

证明: 方法一, 用高中知识

$$\text{由 } \frac{x+y}{2} > \sqrt{xy} > 0 \text{ 得 } \ln \frac{x+y}{2} - \ln \sqrt{xy} = \ln \left(\frac{\frac{x+y}{2}}{\sqrt{xy}} \right) > \ln 1 = 0$$

$$\Rightarrow \ln \sqrt{xy} < \ln \frac{x+y}{2}$$

$$(a > 0, b > 0, a \neq b \text{ 时, } a^2 + b^2 > 2ab, (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 > 2\sqrt{x}\sqrt{y})$$

方法二, 利用凸函数的性质

$$\text{设 } y = \ln t \quad (t > 0) \quad y' = \frac{1}{t} \quad y'' = -\frac{1}{t^2} < 0$$

即 $y = \ln t$ 在 $(0, +\infty)$ 上是凸函数, 凸函数中函数高于弦

$$\text{于是, } \ln \frac{x+y}{2} > \frac{\ln x + \ln y}{2}$$

$$\text{即 } \ln \frac{x+y}{2} > \ln \sqrt{xy}$$

记注

凸函数 $y = f(x)$ 函数高于弦, 即

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_2)}{2}$$

更一般地, $\forall k \in (0, 1)$ 有 $f[kx_1 + (1-k)x_2] > kf(x_1) + (1-k)f(x_2)$

